

文章编号: 1000-7598 (2013) 11-3145-07

低幅值小应变振动下土体弹性刚度的非线性特征与表述方法

贾鹏飞^{1,2}, 孔令伟¹, 王 勇¹, 杨爱武¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071;

2. 西北大学 地质学系 大陆动力学国家重点实验室, 西安 710069)

摘 要: 随着高速铁路建设的兴起, 轨道以及沿线附近建筑物承受低幅值小应变振动荷载的作用。对于小应变振动下土体的有限元计算, 如何确定连接应力和应变之间组带的刚度张量 $\mathbf{E}$, 对于建立合理的预测模型来分析高速铁路轨道以及沿线建筑物的沉降变形至关重要。低幅值小应变振动下剪切模量 G 和阻尼比 D 随剪应变幅值的变化是反映土体刚度及阻尼特征最重要的两个参数。通过共振柱试验发现, 振动荷载作用下土体的剪切模量 G 必须通过振动应变幅值和固结围压共同来确定, 即使在小应变 (剪应变幅值 $10^{-6} < \gamma < 10^{-4}$) 振动下, 也会表现出明显的非线性特征。Davidenkov 模型是在双曲线模型基础上为了更好地拟合剪切模量曲线 $G/G_{\max}-\gamma$ 和阻尼比曲线 $D-\gamma$ 的试验结果而提出的, 不足之处在于 Davidenkov 模型的拟合参数过多, 关键参数 γ_0 的取值没有明确的物理方法。对于低幅值小应变振动情形, 为了简便起见, 忽略大应变振动情形下由于循环效应和速率效应引起的强度变化, 在 Mohr-Coulomb 破坏准则的基础上, 通过引入由给定应力状态下的静抗剪强度 τ_f 与最大剪切模量 $G_{\max}$ 的比值来确定的参考剪应变 γ_{ref} 来代替 Davidenkov 模型中的拟合参数 γ_0 , 尝试提出简化的两参数 Davidenkov 模型, 并通过共 (自) 振柱试验验证了该方法对计算低幅值小应变振动情形下剪切模量和阻尼比的可行性。

关 键 词: 两参数 Davidenkov 模型; 共 (自) 振柱试验; 剪切模量; 阻尼比

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

Nonlinear characteristics and determinate method of elastic stiffness for soils due to low-amplitude small-strain vibrations

JIA Peng-fei^{1,2}, KONG Ling-wei¹, WANG Yong¹, YANG Ai-wu¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. State Key Laboratory of Continental Dynamics, Department of Geology, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Railway track and nearby structures in the vicinity of high-speed railway are exposed to low-amplitude small-strain vibrations as high-speed railway traffic construction activities arise. In the finite element (FE) method, how to determine the stiffness tensor $\mathbf{E}$ is important to build a rational predicting model to analyze the settlement of track and nearby structures in the vicinity of high-speed railway. Shear modulus G and damping ratio D which will vary with shear strain amplitude are two important stiffness and damping parameters. It is found through resonant column test study that the shear modulus G of soil due to vibrations must be determined by the strain amplitude and the confining pressure, even though under small-strain (shear strain amplitude $10^{-6} < \gamma < 10^{-4}$) vibrations, will still show a remarkable nonlinear characteristic. The Davidenkov model based on the classical Hardin-Drnevich model is proposed to fit the experimental tests of the curves of shear modulus $G/G_{\max}$ and damping ratio D vs. γ powerfully. However, the shortcoming of the Davidenkov model is that the fitting parameters are too much, and the key parameter γ_0 can't be determined through a definite physical method. This study proposes an simplified two-parameter Davidenkov model through using a reference shear strain γ_{ref} which will be determined through the ratio of the shear strength τ_f of soil in static triaxial tests versus the maximum shear modulus $G_{\max}$ at a given stress state instead of the fitting parameter γ_0 on the basis of Mohr-Coulomb failure criterion, and verifies the feasibility of the proposed method through tests finally.

Key words: two-parameter Davidenkov model; resonant/free-vibration column test; shear modulus; damping ratio

收稿日期: 2012-02-20

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 51179186, No. 51109208, No. 41302219); 湖北省自然科学基金 (No. 2011CDB407)。

第一作者简介: 贾鹏飞, 男, 1981 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土动力学理论及灾害防治方面的研究。E-mail: pengfeijia@nwu.edu.cn

1 引言

振动荷载作用下土体的应力-应变关系主要表现出明显的非线性、滞回性和变形累积性三方面的特征。刚度张量是连接应力和应变之间的纽带,在各向同性应力-应变关系中,刚度张量 $\mathbf{E}$ 形式最简单,为四阶各向同性张量,可以用两个独立的弹性常数来表示, $\mathbf{E} = \lambda \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{I}$, 其中: λ 、 μ 为 Lamé 弹性常数; $\boldsymbol{\delta}$ 为二阶单位张量,其分量为 Kronecker 符号 δ_{ij} ; $\otimes$ 表示张量积; $\mathbf{I}$ 为四阶等同张量,其分量定义为 $I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ 。除了 Lamé 常数外,其他经常使用的弹性常数还包括弹性模量 E 和泊松比 ν 、剪切模量 G 和体积模量 K 。在传统的工程设计中,习惯于用一个恒定的模量值作为土体的刚度指标,而忽略荷载作用过程中刚度的变化。实际上,即使在静力加载的条件下,随着应变的逐渐增加,土体的刚度也会出现非线性软化行为^[1],在动荷载作用下这种现象就更明显了^[2-3]。

对于小应变振动下土体的有限元计算,如何确定连接应力和应变之间纽带的刚度张量 $\mathbf{E}$? 刚度张量 $\mathbf{E}$ 是否强烈依赖于有效静水压力 $p(p = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3, \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ 表示有效应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的迹)以及振动荷载的幅值? 弹性模量 E (或者剪切模量 G) 能否简单地通过固结试验的加、卸载曲线来确定? 本文着重考察土体在低幅值小应变振动下的刚度和阻尼特征,通过共(自)振柱仪研究剪切模量 G 和阻尼比 D 的在 $10^{-6} \sim 10^{-4}$ 应变范围内的应变依赖性,并讨论有效静水压力 p 对其的影响,在前人研究的基础上确定适合小应变振动下的刚度计算模型。

2 剪切模量 G 和阻尼比 D 的表述方法

Masing 准则经常被应用于描述土体在动荷载作用下的应力-应变关系的非线性和滞回性^[4]。基于 Masing 准则,学者们提出了许多非线性应力-应变本构模型,例如基于 Mohr-Coulomb 和双曲线应力-应变形式的非线性模型^[5-6],并在此基础上提出了如下形式的剪切模量公式:

$$G(\gamma) = G_{\max} [1 - f(\gamma)] \quad (1)$$

$$f(\gamma) = \frac{\gamma/\gamma_{\text{ref}}}{1 + \gamma/\gamma_{\text{ref}}} \quad (2)$$

式中: γ 为剪应变幅值; γ_{ref} 为参考剪应变; $G_{\max}$ 为最大剪切模量。这个关系式后来被 Hardin 和 Drnevich 的试验所证实^[2-3]。

根据剪切模量, Hardin 和 Drnevich 还提出了如下计算阻尼比的经验公式^[2-3]:

$$D = D_{\max} \left(1 - \frac{G}{G_{\max}} \right) \quad (3)$$

式中: $D_{\max}$ 为最大阻尼比,当 $G=0$ 时,阻尼比 D 达到最大值,即 $D(G=0) = D_{\max}$ 。结合式 (1)、(2),可将阻尼比表达为剪应变的形式:

$$D(\gamma) = D_{\max} f(\gamma) \quad (4)$$

对于无限小的剪应变, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} D(\gamma) = 0$ 。对于无限大的剪应变, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} D(\gamma) = D_{\max}$ 。

Hardin-Drnevich 双曲线模型的应力-应变关系,虽然每个参数的取值都具有明确的物理意义,然而由于拟合参数少,对土体剪切模量比曲线试验结果的拟合有时很难令人满意,因此,不少学者都对其进行了修正^[7-10]。Martin 和 Seed^[7]在 Hardin-Drnevich 双曲线模型的基础上,对剪切模量公式(1)中的 $f(\gamma)$ 进行了修正,提出三参数 Davidenkov 模型,即

$$f(\gamma) = \left[\frac{(\gamma/\gamma_0)^{2B}}{1 + (\gamma/\gamma_0)^{2B}} \right]^A \quad (5)$$

式中: γ_0 、 A 、 B 均为与土性有关的拟合参数。需要指出的是,这里的 γ_0 不再是具有明确的物理意义的参考剪应变。结合式 (1)、(5),Davidenkov 模型的应力-应变关系可以表示如下:

$$\tau(\gamma) = G(\gamma)\gamma = G_{\max} [1 - f(\gamma)]\gamma = G_{\max} \gamma \left\{ 1 - \left[\frac{(\gamma/\gamma_0)^{2B}}{1 + (\gamma/\gamma_0)^{2B}} \right]^A \right\} \quad (6)$$

基于 Davidenkov 模型应力-应变关系的 3 个参数 A 、 B 和 γ_0 值的变化对曲线以及应力-应变滞回曲线的形状会产生不同的影响。图 1~3 分别为拟合参数 A 、 B 、 γ_0 对 $G/G_{\max} - \gamma$ 曲线的影响。从图 1、3 中可以看出, A 值的变化和 γ_0 值的变化均导致 $G/G_{\max} - \gamma$ 曲线的整体移动,不过 γ_0 值的影响程度明显比 A 值的影响要大。从图 2 可以看出, B 值的变化影响曲线的曲率。图 1 中当 B 和 γ_0 值不变时,随着 A 值的增大, $G/G_{\max} - \gamma$ 曲线整体上移。图 2 中当 A 和 γ_0 值不变时,随着 B 值的增大, $G/G_{\max} - \gamma$ 曲线先上移,然后下移。图 3 中当 A 和 B 值不变时,随着 γ_0 值的增大, $G/G_{\max} - \gamma$ 曲线整体上移。图 4 是根据 Davidenkov 骨架曲线得到的不同拟合参数 A 和 B 所得的滞回曲线。

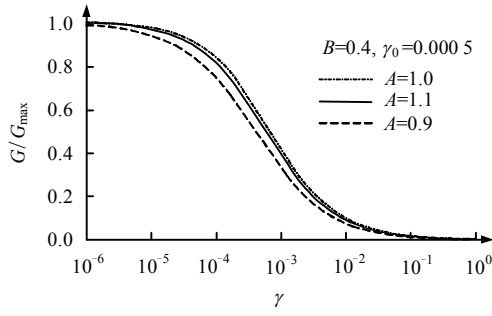
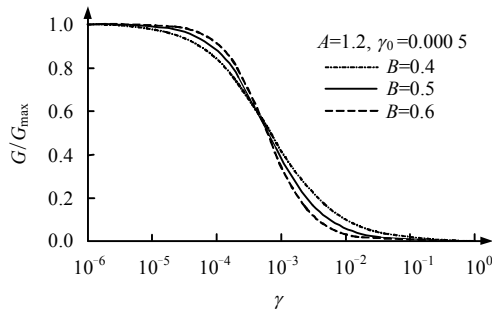
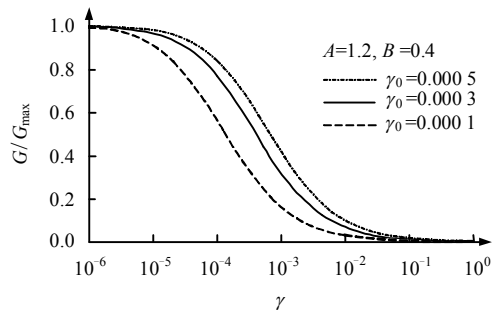
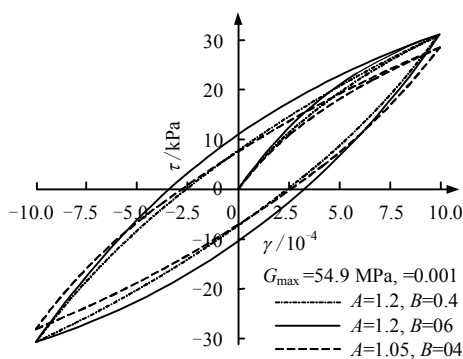
图 1 拟合参数 A 对 $G/G_{\max}$ - γ 曲线的影响Fig.1 Influence of fitting parameter A on $G/G_{\max}$ - γ curves图 2 拟合参数 B 对 $G/G_{\max}$ - γ 曲线的影响Fig.2 Influence of fitting parameter B on $G/G_{\max}$ - γ curves图 3 拟合参数 γ_0 对 $G/G_{\max}$ - γ 曲线的影响Fig.3 Influence of fitting parameter γ_0 on $G/G_{\max}$ - γ curves

图 4 基于 Davidenkov 骨架曲线的应力-应变滞回圈(Masing 准则)

Fig. 4 Stress-strain hysteresis loops based on Davidenkov backbone curves (Masing's criterion)

从拟合参数 A 、 B 、 γ_0 对 $G/G_{\max}$ - γ 曲线影响分析中可以发现, A 、 B 两个拟合参数完全能够决定曲

线的形状和曲率, 而 γ_0 决定了应力-应变滞回曲线的非线性特征。三参数的 Davidenkov 模型虽然能够很好地拟合各类土体在不同应变幅值范围内剪切模量和阻尼比的试验结果, 然而作为拟合参数, γ_0 并没有明确的确定方法。对于低幅值小应变振动情形, 为了简便起见, 本文尝试在 Mohr-Coulomb 破坏准则的基础上, 通过引入由给定应力状态下的静抗剪强度 τ_f 与最大剪切模量 $G_{\max}$ 的比值来确定的参考剪应变 γ_{ref} 来代替 Davidenkov 模型中的拟合参数 γ_0 , 并在接下来的试验中验证其作为参考剪应变对于计算低幅值小应变振动情形下剪切模量和阻尼比的可行性。此时, 将 $f(\gamma)$ 重新修正如下:

$$f(\gamma) = \left[\frac{(\gamma/\gamma_{\text{ref}})^{2B}}{1 + (\gamma/\gamma_{\text{ref}})^{2B}} \right]^A \quad (7)$$

式中: A 为影响 $G/G_{\max}$ - γ 曲线形状的拟合参数; B 为影响 $G/G_{\max}$ - γ 曲线曲率的拟合参数, 并且假定拟合参数 A 和 B 不依赖有效静水压力 p ; γ_{ref} 为参考剪应变。

对于小应变振动, 忽略振动荷载的循环效应和速率效应, 参考剪应变 γ_{ref} 定义为给定应力状态下的静抗剪强度 τ_f 与最大剪切模量 $G_{\max}$ 的比值, 即:

$$\gamma_{\text{ref}} = \frac{\tau_f}{G_{\max}} \quad (8)$$

式中: τ_f 通过破坏时的最大剪应力来定义, 当采用著名的 Mohr-Coulomb 破坏准则时, 在三轴应力状态下

$$\tau_f = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)_f \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (9)$$

式中: 下标 f 表示破坏; φ 为有效内摩擦角; c 为有效黏聚力。

对于阻尼比 D , 由于 Hardin-Drnevich 双曲线模型对试验结果的拟合均不理想, 工程上通常采用如下经验公式:

$$D = D_{\max} \left(1 - \frac{G}{G_{\max}} \right)^n \quad (10)$$

式中: $D_{\max}$ 为最大阻尼比, 为与土性有关的拟合参数, 它决定阻尼比曲线的形状。陈国兴等^[11]通过对大量新近沉积土的试验研究发现, 式 (10) 对新近沉积土阻尼比试验结果的拟合并不理想, 并建议采用如下的经验公式:

$$D = D_{\min} + D_{\max} \left(1 - \frac{G}{G_{\max}} \right)^n \quad (11)$$

式中: $D_{\min}$ 为最小阻尼比, 是土体的基本阻尼比,

与土的性质、固结状态等因素有关。

3 静三轴试验及共（自）振柱试验

本文试验所用的土样均取自湖北荆门的膨胀土，呈褐红色，含有黑色铁锰结核，局部有白色填充物。根据《铁路工程土工试验规程》^[12]，土样有关的基本物理参数试验结果见表 1，从基本物理参

数可得，该土样的塑性指数 I_p 和液性指数 I_L 分别为 $I_p=21.2\%$ ， $I_L=0.009\sim 0.066$ 。由 $I_p>17\%$ 可知，该土属于黏土，由 $0<I_L<0.5$ 可知，该土呈硬塑状态。图 5 为试验土样的颗粒大小分布曲线。按照《铁路工程地质勘察规范》^[13]，该土的自由膨胀率、黏粒含量、以及矿物组成均在膨胀潜势等级判断标准范围内，属于弱膨胀土。

表 1 试验土样的基本物理参数
Table 1 Basic physical parameters of tested soils

天然含水率 $w/\%$	密度 $\rho/(\text{g}/\text{cm}^3)$	颗粒密度 $\rho_s/(\text{g}/\text{cm}^3)$	液限 $w_L/\%$	塑限 $w_p/\%$	塑性指数 $I_p/\%$	缩限 $w_s/\%$	体缩率 $e_v/\%$	收缩系数 C_s	自由膨胀率 $F_s/\%$
21.1~22.3	2.03	2.72	42.10	20.90	21.20	9.90	6.30	0.26	42.00

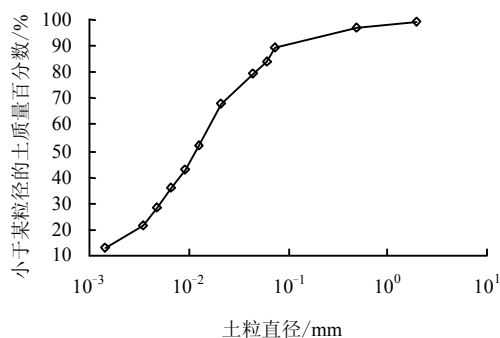


图 5 试验土样的颗粒大小分布曲线

Fig.5 Grain size distribution curve of tested soils

静三轴试验采用的仪器为南京自动化设备总厂生产的 SJ-1A.G 型应变式三轴仪，共(自)振柱试验采用的仪器为南京工业大学自行研制的第二代 GZZ-2 型共（自）振柱仪（见图 6），在试样未破损的小应变范围内（ $10^{-6}\sim 10^{-4}$ ）研究土体的动力性能。

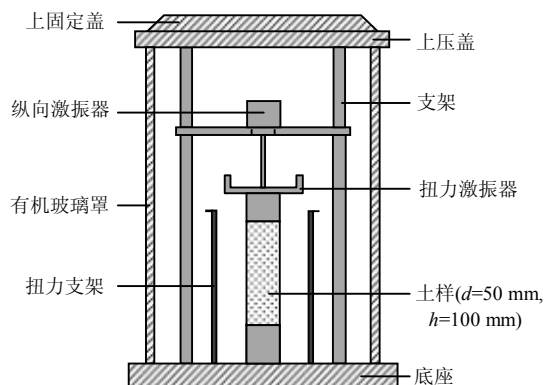


图 6 共（自）振柱试验装置框图

Fig.6 Schematic of resonant/free-vibration column test device

4 试验结果及模型分析

静三轴试验的试样为直径 $d=39.1$ mm，高度 $h=80$ mm 的实心圆柱体土样，共（自）振试验的试样为直径 $d=50$ mm，高度 $h=100$ mm 的实心圆柱状土样。在试验开始之前进行饱和、各向等压固结。

4.1 最大剪切模量 $G_{\max}$ 的确定

正如前面所述，最大剪切模量 $G_{\max}$ 反映了土体在弹性阈值范围内线弹性特征。对于不同的土样，影响剪切模量差异的因素很多，自 20 世纪 60 年代以来，人们就提出了许多不同的经验公式来考虑不同影响因素对土体最大剪切模量 $G_{\max}$ 的影响规律。通过大量室内试验，Hardin 等^[14-15]对于砂性土首先提出了只考虑孔隙比和平均有效主应力影响的 $G_{\max}$ 经验公式。后来 Hardin 等^[16]对于原状黏性土又提出了考虑超固结比影响的修正公式。Hardin^[17]在后续的研究中又提出了一个可以适用于各类土的最大模量计算公式：

$$G_{\max} = 625 \frac{(OCR)^k}{0.3 + 0.7e^2} p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^{0.5} \quad (12)$$

式中： OCR 为超固结比； k 是一个与塑性指数 I_p 有关的经验指数； e 为孔隙比； p_a 为标准大气压； p 为有效静水压力。该公式的优点是采用的参数多，适用于各类土，缺点是有时预测值和试验数据误差比较大。为了增大试验数据与预测值之间的拟合效果，对于各向同性、均匀的饱和土体，本文提出如下经验公式：

$$G_{\max} = G_{\text{ref}} \left(\frac{p}{p_{\text{ref}}} \right)^n \quad (13)$$

式中： p_{ref} 为参考静水压力； n 为模型的参数； G_{ref} 为参考剪切模量，当有效静水压力取参考静水压力时的最大剪切模量值作为参考最大剪切模量的取值。表 2 给出了最大剪切模量的试验值。

表 2 不同有效静水压力 p 下的最大剪切模量 G_{max}
Table 2 Maximum shear modulus G_{max} under different effective hydrostatic pressures p

试验编号	p/kPa	$G_{\text{max}}/\text{MPa}$	试验编号	p/kPa	$G_{\text{max}}/\text{MPa}$
T50-1	50	54.9	T150-1	150	64.7
T50-2	50	55.7	T150-2	150	63.8
T100-1	100	61.0	T250-1	250	69.4
T100-2	100	60.9	T250-2	250	69.8
T100-3	100	60.4			

本文参考静水压力取标准大气压值，即 $p_{\text{ref}} = 100 \text{ kPa}$ ，选择了一个参考静水压力值后，接下来确定参考剪切模量 G_{ref} ，根据本试验不同围压下的最大剪切模量的结果，取各向同性固结围压 100 kPa 下的最大剪切模量的平均值作为参考剪切模量的取值，根据表 2，取 $G_{\text{ref}} = 60.8 \text{ MPa}$ 。模型参数 n 根据试验结果拟合取值，本文中取 $n = 1.5$ 。图 7 显示了最大剪切模量的预测值与试验数据之间很好的一致性。

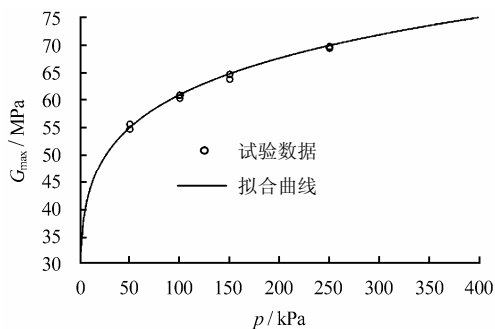


图 7 最大剪切模量 G_{max} 的预测值与试验数据点的比较
Fig.7 Comparison between predicted maximum shear modulus G_{max} and tested data

4.2 参考剪应变 γ_{ref} 的确定

通过静三轴试验，绘制破坏应力摩尔圆得到有效黏聚力 $c = 13.3 \text{ kPa}$ ，有效内摩擦角 $\varphi = 27.7^\circ$ 。根据式 (9) 确定破坏点的最大剪应力值作为强度值，进而确定参考剪应变值，见表 3。

参考剪应变随着有效静水压力的变化而不同（见表 3），作为有效静水压力的函数，本文提出与最大剪切模量对应的经验公式来预测参考剪应变的变化，如式 (14)。

表 3 不同有效静水压力 p 下的参考剪应变 γ_{ref}
Table 3 Reference shear strain γ_{ref} under different effective hydrostatic pressures p

试验编号	p/kPa	$\gamma_{\text{ref}}/10^{-4}$	试验编号	p/kPa	$\gamma_{\text{ref}}/10^{-4}$
T100-1	100	15.838	T150-2	150	8.754
T100-2	100	17.696	T250-1	250	6.829
T150-1	150	11.831	T250-2	250	6.433

$$\gamma_{\text{ref}} = \gamma_{\text{ref}}^0 \left(\frac{p}{p_{\text{ref}}} \right)^n \quad (14)$$

式中： γ_{ref}^0 为在参考静水压力下的参考剪应变；与最大剪切模量中参考静水压力的取值一样，本论文参考静水压力取标准大气压值， $p_{\text{ref}} = 100 \text{ kPa}$ 。此时， $\gamma_{\text{ref}}^0 = 16.5 \times 10^{-4}$ ， $n = -1$ 。图 8 给出了试验数据与预测曲线的比较。

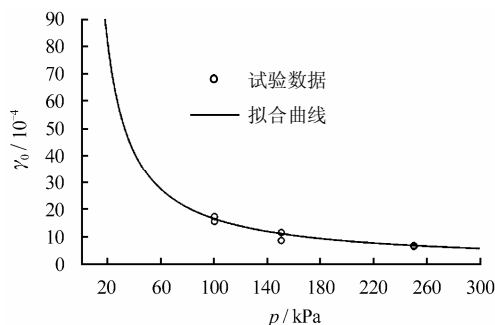


图 8 参考剪应变 γ_{ref} 的预测值与试验数据点的比较
Fig.8 Comparison between predicted reference shear strain γ_{ref} and tested data

4.3 模型分析

确定了最大剪切模量以及参考剪应变后，分别采用两参数 Davidenkov 模型（式 (1)、(7)）和 Hardin-Drnevich 双曲线模型（式 (1)、(2)）对 $G/G_{\text{max}} - \gamma$ 试验结果进行拟合，再用式 (11) 对阻尼比 $D - \gamma$ 试验结果进行拟合。对于式 (7)、(11) 中的拟合参数采用最小二乘法进行估计，对 20 个土样的试验结果进行拟合分析，参数 A 、 B 和 n 分别取值 1.35、0.4、0.5。由于 Hardin-Drnevich 双曲线模型所用的参数少，对试验结果的拟合在低围压下有时候并不理想（见图 9(a)、9(b)）。而两参数 Davidenkov 模型相当理想地模拟了土体在小应变范围内的 $G/G_{\text{max}} - \gamma$ 试验结果（见图 9）。对于阻尼比 $D - \gamma$ 的试验结果，采用陈国兴等^[11]提出的经验公式 (11) 进行拟合，从图 9 可以看出，在小应变范围内，公式 (11) 也能较理想地拟合阻尼比 $D - \gamma$ 的试验结果。

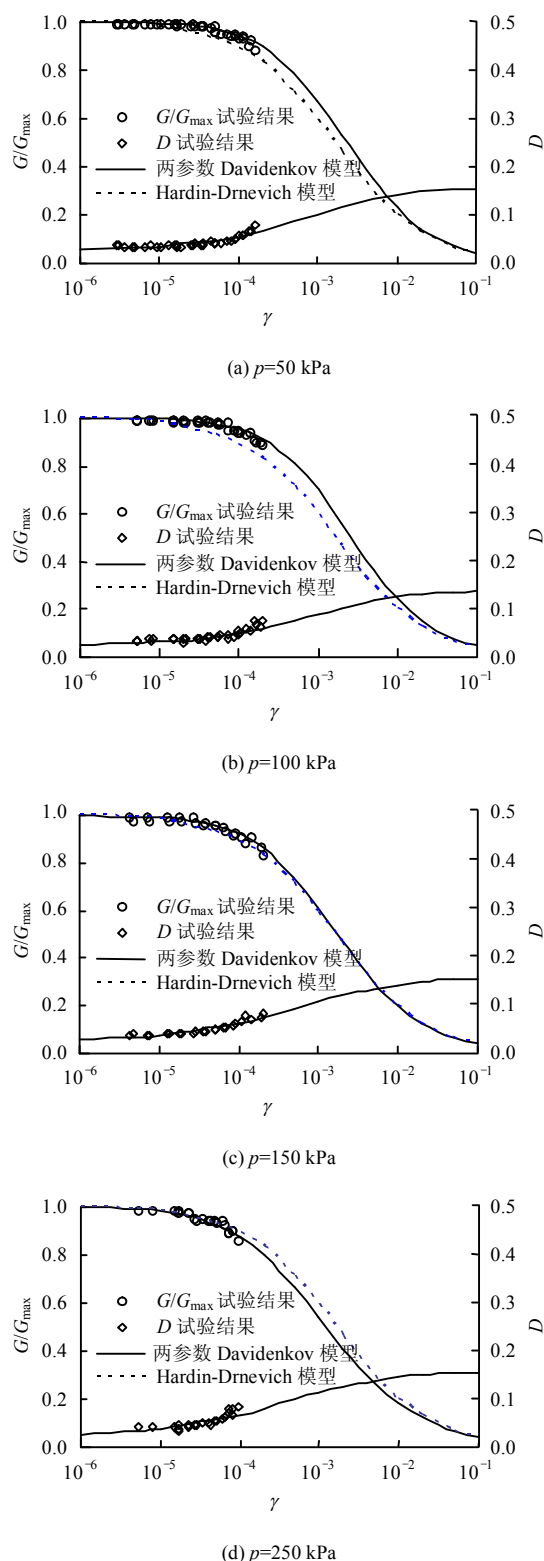


图9 土样在不同有效静水压力 p 下 $G/G_{\max}$ - γ 和 D - γ 预测值和试验值比较

Fig.9 Tested and predicted results of $G/G_{\max}$ - γ and D - γ of samples under different effective hydrostatic pressures p

5 结 论

(1) 振动荷载作用下土体的弹性刚度(剪切模量 G) 必须通过振动应变幅值和固结围压共同来确

定, 即使在小应变(剪应变幅值 $10^{-6} < \gamma < 10^{-4}$) 振动下, 也会表现出明显的非线性特征。对于更小的剪应变幅值 $\gamma < 10^{-6}$ 情况, 最大剪切模量 $G_{\max}$, 通过共振柱试验发现, 可以忽略应变幅值的影响, 只考虑固结围压的影响。

(2) Hardin-Drnevich 双曲线模型虽然每个参数的取值都具有明确的物理意义, 然而由于拟合参数少, 对剪切模量试验结果的拟合有时很难令人满意, 而 Davidenkov 模型虽然能够很好拟合各类土体在不同应变范围内的剪切模量, 不足之处在于关键参数 γ_0 的取值没有明确的物理方法。对于目前高速铁路路基区域土体承受低幅值小应变振动的情形, 本文尝试在 Davidenkov 模型的基础上, 通过参考剪应变 γ_{ref} 的引入, 提出简化的两参数 Davidenkov 模型, 并在此基础上通过试验验证了该方法对于计算小应变振动情形下剪切模量和阻尼比的可行性。至于能否适用于大应变振动的情形, 需要进一步研究论证。

致谢: 本论文共振柱试验得到了南京工业大学陈国兴教授课题组的大力支持, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] ATKINSON J H. Non-linear soil stiffness in routine design[J]. *Geotechnique*, 2000, 50(5): 487—508.
- [2] HARDIN B O, DRNEVICH V P. Shear modulus and damping in soils: Measurement and parameter effects(Terzaghi Lecture)[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1972, 98(6): 603—624.
- [3] HARDIN B O, DRNEVICH V P. Shear modulus and damping in soils: Design equations and curves[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1972, 98(7): 667—692.
- [4] MASING G. Eigenspannungen und verfestigung beim messung (Self stretching and hardening for brass)[C]// *Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics*. Zurich, Switzerland: [s. n.], 1926.
- [5] KONDER R L. Hyperbolic stress-strain response: Cohesive soils[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1963, 89(1): 115—144.
- [6] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1970, 96(5): 1629—1653.